Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л.Н. МАРЧЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Курс лекций
для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть третья

Теория рядов

Гомель 2006

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73
М 30

Рецензенты:

Л.П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»

А.Р. Миротин, профессор, доктор физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

Марченко Л.Н.
М30 Математический анализ [текст] : [курс лекций для студентов физического факультета. Ч.3.: Теория рядов] /Л.Н. Марченко: Мин-во обр. РБ. – Гомель: «УО ГГУ им. Ф. Скорины», 2006. – 99с.

Тексты лекций разработаны в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальности «Физическая электроника». В третьей части излагаются темы «Числовые и функциональные ряды», «Ряды Фурье».

Пособие адресовано студентам физического факультета.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Теория рядов» является третьей частью цикла работ по курсу «Математический анализ», которые написаны на основе лекций, проводимых на физическом факультете Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Их содержание включает материал, соответствующий учебной программе по данной дисциплине, и который изложен в учебниках и учебных пособиях по математическому анализу. Пособие содержит теоретический материал по темам «Числовые и функциональные ряды» и «Ряды Фурье». Пособие основано на педагогических принципах, изложенных в предисловии к первой части данного комплекса.

В начале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце лекции сформулированы вопросы, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Лекция 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.Определение числового ряда.
2.Необходимый признак сходимости числового ряда.
3.Простейшие свойства числовых рядов.
4.Критерий Коши.

1. Определение числового ряда.

Определение 1. Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$$

называется ***числовым рядом***, числа a_1, a_2, …, a_k, … – членами ряда, а число a_k – k-м или ***общим членом*** ряда.

В дальнейшем в качестве индекса суммирования в выражении используется любые буквы латинского алфавита, например i, j, k и т.д.

Примеры. Числовыми рядами являются:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} = 1 + 2 + 4 + ...$,

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + .$

Определение 2. Сумма конечного числа n первых членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n-й ***частичной суммой*** данного ряда.

Таким образом,

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

……………………

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

……………………………

О п р е д е л е н и е 3. Если для последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S ,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***сходящимся***, а число S – ***суммой*** данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Если предел последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ не существует или равен бесконечности, то ряд называют ***расходящимся***.

Примеры. Исследовать на сходимость ряды

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a ,\ a \in \mathbf{R} ,\ a \neq 0 , \qquad 2) \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} ,\ a \neq 0 .$$

***Р е ш е н и е*.**

1. Для ряда $a - a + a - a + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a$ составим частичные суммы: $S_1 = a$, $S_2 = 0$, …, $S_{2n-1} = a$, $S_{2n} = 0$, ….

Последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ этого ряда не имеет предела и поэтому данный ряд расходится.

2. Сумма n первых членов ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$$

имеет вид

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} ,\ q \neq 1 .$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ если } |q| < 1, \\ \infty, \text{ если } |q| > 1, \end{cases}$$

то

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{если } |q|<1, \\ \infty, & \text{если } |q|>1. \end{cases}$$

При $q=-1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ совпадает с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a$, при $q=1$ $S_n = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ сходится при $|q|<1$ и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$, а при $|q| \ge 1$ ряд расходится.

2. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости числового ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{k\to\infty} a_n = 0$.

►Пусть $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Так как $S_n = S_{n-1} + a_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \;◄$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k$

Решение. Данный ряд расходится, так как

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e \ne 0.$$

Определение 4. Выражение вида $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, представляющее собой числовой ряд, называется n***-м остатком*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Если n-й остаток ряда сходится, то его сумма обозначается r_n, т.е. $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ или $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k=S_n+r_n.$$

Теорема 2. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда сходится, то сам ряд также сходится.*

Без доказательства.

Следствие. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходится, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

► Пусть $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, $r_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n+k}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}\left(S-S_n\right)=S-S=0.$$ ◄

Данное свойство говорит о том, что отбрасывание любого конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

Пример. Исследовать на сходимость ***гармонический ряд***

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}+...=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Решение. Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$, однако гармонический ряд расходится. Действительно, предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

Из неравенства

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},\ n\in\mathbf{N},$$

предельным переходом по n получаем противоречие: $0\geq\frac{1}{2}$.

3. Свойства сходящихся числовых рядов. Сходящиеся числовые ряды обладают следующими свойствами.

1. *Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).*

► Действительно, указанные операции изменят на одну и ту же постоянную величину все частичные суммы ряда, начиная с некоторого номера, а это не влияет на сходимость или расходимость последовательности частичных сумм ряда. ◄

2. *Если ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся и их суммы равны* S_a *и* S_b *соответственно, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *также сходится и* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = S_a + S_b$.

► Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = S_a + S_b. ◄$$

Отметим, что из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ в общем случае не следует сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Пример. Ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots$ сходится, а ряды $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} -1$ расходятся.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ называется ***суммой рядов*** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

3. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится и его сумма равна* S, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ *также сходится и* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot S$.

►Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha \cdot S. ◄$$

Ряд $\alpha\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ называется ***произведением ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ ***на число*** α.

Операции суммирования рядов и умножения ряда на число называются ***линейными операциями*** над рядами.

Из данных определений вытекает, что линейные операции над рядами реализуются с помощью линейных операций над их членами.

4. Критерий Коши.

Теорема 3 (критерий Коши сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon)$, *что для всех* $n>N(\varepsilon)$ *и всех целых* $p\geq 0$ *имело место неравенство*

$$\left|a_n+a_{n+1}+...+a_{n+p}\right|<\varepsilon .$$

► Для последовательности частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ данного ряда из критерия Коши существования конечного предела последовательности следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $N(\varepsilon)$, что для всех $n>N(\varepsilon)$ и всех целых $p\geq 0$ имеет место неравенство $\left|S_{n+p}-S_{n-1}\right|<\varepsilon$.

Тогда $\left|a_n+a_{n+1}+...+a_{n+p}\right|=\left|S_{n+p}-S_{n-1}\right|<\varepsilon$. ◄

Вопросы для самоконтроля

1. Какое выражение называется числовым рядом?
2. Что называется суммой ряда?
3. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости ряда.
4. Какое выражение называется остатком ряда?
5. Перечислите простейшие свойства сходящихся числовых рядов.
6. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

Лекция 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Интегральный признак Коши.
2. Признаки сравнения.
3. Признак Даламбера.
4. Признак Коши.

1. Интегральный признак Коши. Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, члены a_k которого неотрицательны, $a_k \geq 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

► *Необходимость.* В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ последовательность его частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится. Следовательно, она ограничена.

Достаточность. Пусть последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена. Поскольку данный ряд является рядом с неотрицательными членами, то частичные суммы образуют неубывающую последовательность

$$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \ldots .$$

В силу теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности последовательность $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ◄

Теорема 2 (интегральный признак Коши). *Если неотрицательная интегрируемая функция* $f(x)$ *на промежутке* $[1;+\infty)$ *монотонно убывает и члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *имеют вид* $a_k = f(k)$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или* *расходятся одновременно, причем в случае сходимости*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 .$$

► В силу монотонности функции $f(x)$ для $k \le x \le k+1$ справедливо неравенство $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$. Интегрируя его в пределах от k до $k+1$, имеем

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le \int_k^{k+1} f(k)dx$$

или

$$a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le a_k ,$$

так как $f(k) = a_k$. Запишем полученные неравенства для $k = \overline{1,n}$:

$$a_2 \le \int_1^2 f(x)dx \le a_1 ,$$

$$a_3 \le \int_2^3 f(x)dx \le a_2 ,$$

$$\text{.......... ....} ,$$

$$a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le a_n .$$

Просуммировав их, найдем

$$S_{n+1} - a_1 \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n .$$

Случай 1. Пусть интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится и равен I, тогда $\int_1^{n+1} f(x)dx \le I$ и $S_{n+1} \le I + a_1 = C$ или $S_n \le C \quad \forall n \in N$. Итак, монотонно возрастающая последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху и, следовательно, сходится. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Переходя в неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$S \ge \int_1^{\infty} f(x)dx \ge S - a_1 .$$

Откуда следует

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le S \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 .$$

Наоборот, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то его последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, а тем более ограничена и сходится монотонно возрастающая последовательность $I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)dx$, т.е. сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Случай 2. Пусть интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, тогда в силу неравенства $S_n \ge \int_1^{n+1} f(x)dx$ последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ неограниченна. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. Если же расходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то последовательность его частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ неограниченна. Поэтому неограничена последовательность $I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)dx$.

Следовательно, интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ***обобщенный гармонический ряд***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \ p \in \mathbf{R} .$$

Решение. При $p = 1$ ряд совпадает с гармоническим рядом и расходится.

Если $p \le 0$, то $\dfrac{1}{k^p} \ge 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k^p} \ne 0$. В этом случае ряд расходится, так как нарушается необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $p > 0$ и $p \ne 1$. Положим $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$.

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^p}$.

Известно, что несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

2. Признаки сравнения.

Теорема 3 (признак сравнения). *Пусть для членов рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *справедливо неравенство* $0 \le a_k \le b_k \quad \forall k \ge n_0 \in \mathbf{N}$.

Тогда: 1) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится,*

2) если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

► Предположим сначала, что $n_0 = 1$.

1. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Обозначим через S_n и S'_n n-е частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ соответственно. Заметим, что $S_n \le S'_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Тогда, согласно теореме 1 из сходимости

ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует ограниченность последовательности $(S'_n)_{n=1}^{\infty}$, а значит, и последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$. Из ограниченности последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. Тогда последовательность $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ неограниченна. Следовательно, неограничена и последовательность $(S'_n)_{n=1}^{\infty}$. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Если $n_0 > 1$, то для доказательства теоремы достаточно рассмотреть ряды $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$, так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. ◄

Замечание. Доказанный признак является *достаточным* для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{k^k}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}.$$

Решение. Так как $\frac{1}{k^k} \le \frac{1}{k^2}$ $\forall k \ge 2$ и обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится ($p = 2 > 1$), то сходится и заданный ряд.

Следствие (предельный признак сравнения). *Пусть для членов рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k > 0$*, существует предел* $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = A$*. Тогда 1) если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится и* $0 \le A < +\infty$ *, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, 2) если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится и* $0 < A \le +\infty$ *,* *то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, 3) если* $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=1$*, то ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

► Из определения предела $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=A$ для любого положительного ε, например $0<\varepsilon<L$, найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$A-\varepsilon<\frac{a_k}{b_k}<A+\varepsilon \quad \forall k\ge N(\varepsilon)$$

или, так как $b_k>0$,

$$(A-\varepsilon)b_k<a_k<(A+\varepsilon)b_k \quad \forall k\ge N(\varepsilon).$$

Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, согласно свойству 3 числовых рядов, следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(A+\varepsilon)b_k$, а значит, по теореме 3 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, то расходятся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(A-\varepsilon)b_k$ и, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Аналогично доказывается, что из сходимости (расходимости) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует сходимость (расходимость) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{k}$.

Решение. Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$.

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}}=\pi,\ 0<\pi<\infty,$$

и гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд.

Замечание. При применении признаков сходимости рядов, в качестве рядов, используемых для сравнения, выбирают, как правило:

1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, $(a\neq 0)$, из элементов геометрической прогрессии, сходящийся при $|q|<1$ и расходящийся при $|q|\geq 1$;

2) обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$, сходящийся при $p>1$ и расходящийся при $p\leq 1$.

3. Признак Д'Аламбера.

Теорема 4 (признак Д'Аламбера). *Пусть для ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k>0$, *существует предел* $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L$. *Тогда: 1) при* $L<1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится; 2) при* $L>1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

► По определению предела следует, что для любого $\varepsilon>0$, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, выполняются неравенства

$$L-\varepsilon<\frac{a_{k+1}}{a_k}<L+\varepsilon\quad \forall k\geq N(\varepsilon).$$

Случай 1. Если $L<1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что число $q=L+\varepsilon<1$. Тогда из неравенства $\frac{a_{k+1}}{a_k}<q\quad \forall k\geq N(\varepsilon)=N$ следует, что

$$a_{N+1}<a_N q,$$

$$a_{N+2}<a_{N+1}q<a_N q^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$a_{N+k}<a_{N+k-1}q<a_N q^k,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_N q^k$ при $|q|<1$ сходится, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$, а следовательно, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Случай 2. Если $L>1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что число $q=L-\varepsilon>1$. Тогда имеем неравенство

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > q \quad \forall k \ge N(\varepsilon)$$

или

$$a_{k+1} > q a_k \quad \forall k \ge N(\varepsilon).$$

Это означает, что, начиная с номера $N(\varepsilon)$, члены ряда возрастают, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется и ряд расходится. ◄

Примеры. Исследовать сходимость ряды

1) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$,

2) $2+\frac{2^2}{2^4}+\frac{2^3}{3^4}+\frac{2^4}{4^4}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^4}$.

Решение. 1. Вычислим предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)!k^k}{(k+1)^{k+1}k!}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^n}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{e}.$$

Следовательно, $L=\frac{1}{e}<1$ и данный ряд сходится.

2. Вычислим предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}k^4}{(k+1)^4\cdot 2^k}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^4}=2.$$

Так как $L=2>1$, то исходный ряд расходится.

Замечание. Если в условиях теоремы 4 $L=1$, то о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ нельзя сказать ничего определенного.

4. Признак Коши.

Теорема 5 (признак Коши). *Пусть для ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$, *существует предел* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$. *Тогда 1) при* $L < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится; 2) при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

► По определению предела следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что выполняются неравенства

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{a_k} < L + \varepsilon \quad \forall k \geq N(\varepsilon).$$

Случай 1. Если $L < 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что число $q = L + \varepsilon < 1$. Тогда имеем $a_k < q^k \quad \forall k \geq N(\varepsilon)$, и, согласно признаку сравнения, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ при $0 < q < 1$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Случай 2. Если $L > 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $L - \varepsilon = q > 1$. Тогда получаем $a_k > q^k \quad \forall k \geq N(\varepsilon)$. Из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, $q > 1$, согласно признаку сравнения, следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{k+1}\right)^k$.

Р е ш е н и е . Так как

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k+1} = 2 > 1,$$

то данный ряд расходится.

Замечание. Можно доказать, что если существует предел $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, то существует и предел $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ (и они равны между собой). Обратное утверждение не всегда имеет место, т.е. признак Коши «сильнее» признака Д'Аламбера.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами.

2. Сформулируйте и докажите признак сравнения сходимости рядов с неотрицательными членами.

3. Сформулируйте и докажите признак Д'Аламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.

4. Сформулируйте и докажите признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.

Лекция 3. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

1. Знакочередующиеся ряды.
2. Абсолютно сходящиеся ряды.
3. Условно сходящиеся ряды.
4. Признаки Дирихле и Абеля.

1. Знакочередующиеся ряды.

Определение 1. ***Знакочередующимся*** называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{k-1}a_k + \ldots,$$

где a_k, $k = 1,2,\ldots$, – числа одного знака.

Теорема 1 (признак Лейбница). *Пусть члены знакочередующегося ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ *удовлетворяют условиям:*

1) $a_k \ge a_{k+1}$ $\forall k \in \mathbf{N}$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ *сходится, а его сумма* S *не превосходит первого члена, т.е.* $S \le a_1$.

► Рассмотрим четную частичную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Так как все выражения в круглых скобках неотрицательны, то последовательность четных частичных сумм (S_{2n}) ряда неубывающая.

С другой стороны, сумму S_{2n} можно записать в виде:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1.$$

Таким образом, последовательность $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху. Следовательно, по признаку Вейерштрасса последовательность (S_{2n}) сходится.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + a_{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S\ ,$$

следует, что $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = S$.

Из неравенства $S_{2n} \le a_1$ заключаем, что $S \le a_1$. ◄

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 1 называется ***рядом Лейбница***.

Следствие. *Остаток* $r_n = (-1)^n\left(a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots\right)$ *ряда Лейбница удовлетворяет неравенству* $|r_n| \le a_{n+1}$.

► Действительно, ряд Лейбница

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-n-1}a_k = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots$$

только знаком отличается от остатка r_n ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$$

и не превосходит своего первого члена a_{n+1} .◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Решение. Так как

$$\frac{1}{k^2} > \frac{1}{(k+1)^2}\quad \forall k \in \mathbf{N}\ \text{ и }\ \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2} = 0,$$

то данный ряд сходится.

2. Абсолютно сходящиеся ряды.

Определение 2. Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Примеры. Знакопеременными рядами являются:

1) $1-1-1+1+1-1-1+\ldots+(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$;

2) $\sin\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \ldots + \frac{\sin k\alpha}{k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}$, $\alpha \ne \frac{\pi}{2}m$, $m \in \mathbf{N}$.

Очевидно, что знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

О п р е д е л е н и е 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***абсолютно сходящимся***, если знакоположительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится.

Теорема 2 (критерий Коши абсолютной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon)$, *что для всех* $n > N(\varepsilon)$ *и всех целых* $p \geq 0$ *имело место неравенство*

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon .$$

► Доказательство следует из определения абсолютно сходящегося ряда и критерия Коши сходимости ряда. ◄

Теорема 3. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *абсолютно сходится, то он сходится.*

► Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ по свойству 3 линейных операций над рядами следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$.

Поскольку $0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k| \quad \forall k \in \mathbf{N}$, то из признака сравнения следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|)$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ можно представить в виде разности сходящихся рядов: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_k|$.

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ◄

Замечание. Обратное утверждение в общем случае не имеет места.

Пример. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$, 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Решение. 1. Ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда, имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и является сходящимся. Значит, ряд исходный является абсолютно сходящимся.

2. По признаку Лейбница ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ сходится. С другой стороны, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ является расходящимся гармоническим рядом. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

3. Условно сходящиеся ряды.

Определение 4. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется ***условно сходящимся***.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ сходится условно.

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ обозначим через a_1^+, a_2^+, …, a_k^+,… и a_1^-, a_2^-, …, a_k^-, … соответственно его неотрицательные и отрицательные члены, взятые в том же порядке, в котором они расположены в ряде $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. Рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^-$, члены которых неотрицательны.

Теорема 4. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *условно сходится, то оба ряда* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^+$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^-$ *расходятся.*

Без доказательства.

Теорема 5 (Римана). *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *условно сходится, то, каково бы ни было действительное число* s*, можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равна* s.

Без доказательства.

Теорема Римана показывает, что для абсолютно сходящегося ряда независимость конечных сумм от порядка слагаемых переносится на бесконечные суммы:; если же ряд расходится, то сумма ряда зависит от порядка слагаемых.

Пример. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{k-1} \neq 0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1-1+1-1+1-\ldots$$

является расходящимся.

Ряды

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

и

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots,$$

полученные из него путем объединения его членов, сходятся. Причем

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0,$$
$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1.$$

4. Признаки Дирихле и Абеля.

Лемма 1 (Абеля). *Пусть 1)для всех* $i = 1,2,\ldots,n-1$ *выполняется неравенства* $a_i \le a_{i+1}$ *или* $a_i \ge a_{i+1}$, *2)для всех* $k = 1,2,\ldots,n$ *выполняются неравенства*

$$|b_1 + b_2 + \ldots + b_k| \le B.$$

Тогда $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le B(|a_1| + 2|a_n|)$.

Без доказательства.

Теорема 6 (признак Дирихле). *Пусть*

1) последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *монотонна и* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$,

2) последовательность сумм $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, *огра-*

ничена. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

► Из ограниченности последовательности $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ следует, что существует $B > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$ выполняются неравенства $|B_n| \le B$. Следовательно, $\forall\, n \ge 2$ и $\forall\, p \in \mathbf{Z}_+$ выполняются неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{n} b_{n+k}\right| = \left|B_{n+p} - B_{n-1}\right| \le \left|B_{n+p}\right| + \left|B_{n-1}\right| \le 2B .$$

В силу условия 1)

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon):\; \forall\; n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Тогда для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех целых $p \ge 0$ имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \le 2B\left(|a_n| + 2|a_{n+p}|\right) < 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B}\right) = \varepsilon .$$

Согласно критерию Коши сходимости рядов, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k}$.

Решение. Последовательность $(a)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывающая и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Рассмотрим последовательность

$$(B_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right)_{n=1}^{\infty}.$$

При $\alpha \ne 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + ... + \sin n\alpha =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \ldots + 2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \ldots + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right| \le = \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

При $\alpha \ne 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, все рассматриваемые суммы ограничены. В силу признака Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}$ сходится.

При $\alpha = 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, все члены ряда обращаются в нуль и ряд также сходится.

Теорема 7 (признак Абеля). *Пусть*

1) последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *ограничена и монотонна,*

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

► Из ограниченности и монотонности последовательности $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. Поэтому можно записать $a_k = a + \alpha_k$, где последовательность $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ монотонна и

$\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует, что последовательность его частичных сумм $\left(B_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, ограничена.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a + \alpha_k\right) b_k = a \sum_{k=1}^{\infty} b_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k$$

есть сумма двух сходящихся рядов (1-й по условию, 2-й по признаку Дирихле).◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k} \cos\frac{\pi}{k} .$$

Решение. Последовательность $\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty} = \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна. Ряд сходится по признаку Дирихле. Согласно признаку Абеля ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k} \cos\frac{\pi}{k}$ сходится.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется знакочередующимся?
2. Сформулируйте и докажите признак Лейбница.
3. Какой ряд называется знакопеременным, абсолютно сходящимся?
4. Сформулируйте критерий Коши абсолютной сходимости ряда.
5. Какими свойствами обладают условно сходящиеся ряды?
6. Сформулируйте и докажите признак Дирихле.
7. Сформулируйте и докажите признак Абеля.

Лекция 4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

1. Сходимость функциональных последовательностей.
2. Функциональные ряды и их сходимость.
3. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.
4. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

1. Сходимость функциональных последовательностей. Пусть на множестве X задана последовательность функций

$$\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(f_1(x);\ f_2(x);\ f_3(x);\ldots\right),$$

принимающих числовые значения в точках $x \in X$.

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что $\forall n \in \mathbf{N}$ во всех точках $x \in X$ выполняется неравенство

$$\left|f_n(x)\right| \le M .$$

Символическая запись:

$$\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbf{N} \text{ и } \forall\, x \in X \quad \left|f_n(x)\right| \le M .$$

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ называется ***поточечно сходящейся*** к функции $f(x)$ на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$, т.е. $\forall\, x \in X \ \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Символическая запись:

$$f_n(x) \to f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\ \varepsilon > 0 \ \ \forall\ x \in X \ \ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall\ n > N(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon .$$

Геометрически поточечная сходимость к предельной функции $f(x)$ в точке x_0 означает, что графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, … в точке с абсциссой $x = x_0$ «прижимаются» к графику функции $f(x)$ при $x = x_0$ (рис.1).

Пример. Последовательность функций $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1; x; x^2;\ldots\right)$ задана на множестве $X = [0;1]$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 1, \\ 0 \text{ при } 0 \le x < 1. \end{cases}$$

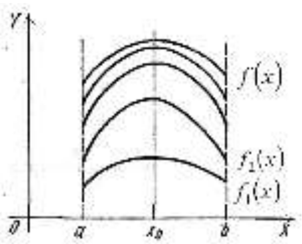

Рис.1. Геометрический смысл поточечной сходимости функционального ряда

Определение 3. Функциональная последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ называется ***равномерно сходящейся*** к функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n>N(\varepsilon)$ и всех точек $x\in X$ имеет место неравенство:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon .$$

Символическая запись:

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall\ n>N(\varepsilon)\ \text{и}\ \forall\ x\in X\ \Rightarrow$$

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon .$$

Лемма 1. *Для того чтобы последовательность функций* $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходилась на множестве* X *к функции* $f(x)$*, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{X}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$.

Без доказательства.

Обозначим $r_n=\sup\limits_{X}\left|f_n(x)-f(x)\right|$.

Тогда последовательность $\left(r_n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\sup\limits_{X}\left|f_n(x)-f(x)\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ является числовой последовательностью.

Пример. Доказать, что функциональная последовательность $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(1;x;x^2;...\right)$, заданная на множестве $X=\left[0;\frac{1}{2}\right]$, является равномерно сходящейся на этом множестве.

Решение. Предел существует и $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0=f(x)$ для всех

$x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Так как $\sup\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} \left|x^n - 0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} \left|x^n - 0\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 .$$

Согласно лемме 1, последовательность $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1; x; x^2; ...\right)$ сходится равномерно к нулю на отрезке $X = \left[0; \frac{1}{2}\right]$: $x^n \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} 0$.

Геометрически равномерная сходимость последовательности $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ означает: если график функции $y = f(x)$ заключен в ε-полосу, определяемую неравенствами $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$, $x \in [a;b]$, то графики всех функций $f_n(x)$, $n > N(\varepsilon)$ целиком лежат в этой полосе (рис.2).

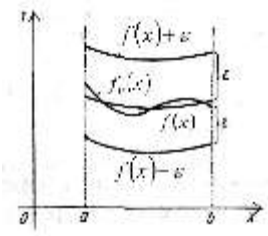

Рис.2. Геометрический смысл равномерной сходимости функционального ряда

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). *Для того чтобы последовательность функций* $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходилась на множестве* X *к функции* $f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $N = N(\varepsilon)$, *что всех точек* $x \in X$, *всех* $n > N$ *и всех* $p \in \mathbf{Z}_+$ *выполнялось неравенство*

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon .$$

Без доказательства.

Символическая запись:

$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon): \forall\ x \in X,\ \forall\ n > N\ \forall\ p \in \mathbf{Z}_+ \quad \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$.

2. Функциональные ряды и их сходимость. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$, … – последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Определение 4. Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

членами которого являются функции $u_k(x)$, называется ***функциональным***.

Каждому значению $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его ***областью сходимости***. Обозначим ее через D. Очевидно, что $D \subseteq X$. Если множество D пусто, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ расходится в каждой точке множества X.

Определение 5. ***n-й частичной суммой*** $S_n(x)$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется конечная сумма

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Ряд $r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x)$ называется ***n-м остатком*** ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

О п р е д е л е н и е 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***сходящимся поточечно*** к функции $S(x)$ на множестве X, если последовательность его частичных сумм $\left(S_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к $S(x)$ на X, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \iff \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \;\; \forall\, x \in X \; .$$

Функция $S(x)$ называется ***суммой*** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Очевидно, что для сходящегося на множестве X ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ его остаток

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) \to 0 \;\; \forall x \in X \;\text{ при }\; n \to \infty \; .$$

О п р е д е л е н и е 7. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве $D_1 \subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n(x) \right|$.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его сходимость, то $D_1 \subset D$, где D – область сходимости функционального ряда.

Пример. Найти область сходимости ряда

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} + \ldots + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}} \; .$$

Р е ш е н и е. Члены исходного ряда при $x \neq 0$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1}{1+x^2} < 1$, а при $x = 0$ все обращаются в нуль. Тогда

$$S(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0, \\ 1 + x^2, \text{ если } x \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, областью сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ является вся числовая ось $\mathbf{R}$. При этом, хотя все члены ряда непрерывны на $\mathbf{R}$, сумма $S(x)$ разрывна в точке $x=0$.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда используются признаки Коши и Д'Аламбера, для которых в рассматриваемом случае предел L, вообще говоря, будет функцией переменной x.

Пример. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}.$$

Решение. Зафиксируем точку x. Применим для полученного числового ряда признак Д'Аламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^k}{x^{k-1}}\right|=|x|.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|x|^{k-1}$ сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geq 1$.

Таким образом, областью абсолютной сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$ является интервал $(-1;1)$.

Определение 8. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $\left(S_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $S(x)$ на X:

$$\forall\ x\in X\quad \sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows S(x)\ \Leftrightarrow\ S_n(x)\rightrightarrows S(x).$$

Если $r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}(x)$ n-й остаток ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, условие равномерной сходимости ряда можно записать в виде

$$r_n(x) \rightrightarrows 0.$$

Замечание. Различие определений *поточечной* и *равномерной* сходимостей функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер $N(\varepsilon)$ зависит от ε и $x \in X$, т.е. $N = N(\varepsilon; x)$, а во втором – только от ε, т.е. $N = N(\varepsilon)$. *Поточечную* сходимость называют также ***неравномерной***.

Пример. Показать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}$ в области $X = \mathbf{R}$ сходится неравномерно.

Решение. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $x \neq 0$. Тогда

$$S_n(x) = (1+x^2)\left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}\right),$$

и неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \varepsilon$$

выполняется при $n > N(\varepsilon, x) = 1 - \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x^2)}\right]$.

Действительно,

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \varepsilon \;\Rightarrow\; (1+x^2)^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; (n-1)\ln(1+x^2) > -\ln \varepsilon \;\Rightarrow$$

$$n > 1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x^2)}.$$

Отсюда $N(\varepsilon, x) = 1 - \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x^2)}\right]$.

Поскольку $N(\varepsilon, x) \to +\infty$ при $x \to 0$ и $0 < \varepsilon < 1$, то при выбранном ε не существует конечного номера $N(\varepsilon)$, который не зависит от x, такого, чтобы выполнялось неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \;\; \forall n > N(\varepsilon),\; \forall x \in \mathbf{R}$.

Значит, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{k-1}}$ на $\mathbf{R}$ неравномерная.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости ря-

да). *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *равномерно сходился на множестве* X *к функции* $S(x)$*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* $N(\varepsilon)$*, что всех* $n > N(\varepsilon)$*, всех* $p \in \mathbf{Z}_+$ *и всех точек* $x \in X$ *выполнялось неравенство*

$$\left| u_n(x) + u_{n+1}(x) + .. + u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon .$$

Без доказательства.

3. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 3 (признак Вейерштрасса). *Пусть*

1) члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$\left| u_k(x) \right| \le a_k \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ \forall x \in X ;$$

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_n \ge 0$*, сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* X .

► Так как числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то его остаток $r_n \to 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \ \forall n > N(\varepsilon) \qquad r_n < \varepsilon .$$

Тогда $\forall n > N(\varepsilon)$

$$\left| r_n(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n < \varepsilon \qquad \forall x \in X .$$

По определению это и означает равномерную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X . ◄

Определение 9. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, члены которого удовлетворяют неравенствам $|u_k(x)| \le a_k \quad \forall k \in \mathbf{N}$, $\forall x \in X$, называется ***мажорантным*** рядом или ***мажорантой*** для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, а сам функциональный ряд в этом случае называется ***мажорируемым*** на множестве X.

Пример. Найти область равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$.

Решение. Так как

$$\frac{\cos kx}{k^3} \le \frac{1}{k^3} \quad \forall k \in \mathbf{N},\ \forall x \in X$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ сходится, то на основании признака Вейерштрасса заключаем, что областью равномерной сходимости заданного ряда является вся числовая ось $\mathbf{R}$.

Теорема 4 (признак Дирихле). *Пусть 1) последовательность функций $(a_k(x))_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к нулю на множестве X; 2) $(a_k(x))_{k=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ монотонна; 3) последовательность частичных сумм $(B_n(x))_{n=1}^{\infty}$, $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$, ограничена на X. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ равномерно сходится на X.*

Без доказательства.

Теорема 5 (признак Абеля). *Пусть*

1) последовательность функций $(a_k(x))_{k=1}^{\infty}$ ограничена на множестве X;

2) $(a_k(x))_{k=1}^{\infty}$ в каждой точке $x \in X$ монотонна;

3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равномерно сходится на X.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ равномерно сходится на множестве X.

4. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Теорема 6 (непрерывность). *Если на множестве* X *функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма* $S(x)$ *непрерывна на* X .

► В силу равномерной сходимости ряда на множестве X для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N(\varepsilon) = N$

$$|r_N(x)| = |S(x) - S_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in X .$$

Поскольку функция $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ непрерывна на X , то $\forall\ x_0 \in X$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} S_n(x) = S(x_0)$. По определению предела $\forall\ \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\forall\ x \in X$ удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|S_N(x) - S_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Учитывая, что $S(x) = S_N(x) + r_N(x)$, для любого $\varepsilon > 0$ и $\forall\ x \in X$ удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ получим:

$$|S(x) - S(x_0)| = |S_N(x) + r_N(x) - S_N(x_0) - r_N(x_0)| \leq$$

$$\leq |S_N(x) - S_N(x_0)| + |r_N(x)| + |r_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Значит, функция $S(x)$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in X$. ◄

Следствие. *В равномерно сходящемся ряде возможен почленный переход к пределу, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) \quad \forall x_0 \in X .$$

► Действительно, в силу непрерывности суммы $S(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x). \text{ ◄}$$

Теорема 7 (почленное интегрирование). *Если функциональ-*

ный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *с непрерывными членами сходится к функции* $S(x)$ *равномерно на отрезке* $[a;b]$, *то его можно почленно интегрировать на любом отрезке* $[x_0;x]\subset[a;b]$ *и справедливо равенство:*

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\right)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt ,$$

причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ *сходится равномерно на* $[a;b]$.

► В силу равномерной сходимости ряда

$$\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon):\ \forall n>N(\varepsilon)\ \ \forall x\in[a;b]\quad |S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда $\forall x\in[a;b]$ и $\forall n>N(\varepsilon)$

$$\left|\int_{x_0}^{x} S(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(S(t)-\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right)dt\right| \le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}|S(t)-S_n(t)|dt\right| \le \frac{\varepsilon}{b-a}|x-x_0|<\varepsilon .$$

А это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$ к функции $\int_{x_0}^{x} S(t)dt$. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x^2}$.

Так как $\frac{1}{k^2+x^2}\le\frac{1}{k^2}$ $\forall x\in\mathbf{R}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то согласно признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $\mathbf{R}$. Интегрируя его почленно на отрезке $[0;x]$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{1}{k^2+t^2}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}.$$

В силу теоремы 7 ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$ сходится равномерно на множестве $\mathbf{R}$.

Теорема 8 (почленное дифференцирование). *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ *с непрерывно дифференцируемыми на отрезке* $[a;b]$ *членами сходится к функции* $S(x)$ *а ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}u'_k(x)$ *сходится равномерно на этом отрезке, то исходный ряд сходится равномерно на* $[a;b]$, *его сумма* $S(x)$ *– непрерывно дифференцируемая функция и справедливо равенство*

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u'_k(x).$$

► Обозначим через $\delta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u'_k(x)$. Интегрируя это равенство на отрезке $[x_0;x]\subset[a;b]$, получаем

$$\int_{x_0}^{x}\delta(t)dt=\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{\infty}u'_k(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u'_k(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}(u_k(x)-u_k(x_0))=S(x)-S(x_0)$$

или $\int_{x_0}^{x}\delta(t)dt=S(x)-S(x_0)$.

Левая часть равенства дифференцируема по x. Следовательно, дифференцируема по x и правая его часть. Получим: $\delta(x)=S'(x)$.

Тогда справедливо равенство $S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u'_k(x)$.

Равномерная сходимость на $[a;b]$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ следует из теоремы 7. ◄

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$.

Решение. Очевидно, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ сходится при $|x| < 1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда сходится равномерно при $|x| \le q < 1$ на основании признака Вейерштрасса, так как он мажорируется числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$, сходящимся по признаку Д'Аламбера. На основании теоремы 8

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1;1)$,

поскольку для любого x из указанного интервала всегда найдется такое q, что выполняется неравенство $|x| \le q < 1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение ограниченной функциональной последовательности.
2. Какая функциональная последовательность называется поточечно сходящейся на множестве X ?
3. Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости последовательности.
4. Дайте определение функционального ряда, его области сходимости.
5. Сформулируйте определения поточечной и равномерной сходимости функционального ряда.
6. Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.
7. Перечислите свойства равномерно сходящихся рядов.

Лекция 5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1.Определение и сходимость степенного ряда.
2. Радиус сходимости и интервал сходимости.
3.Свойства степенных рядов.

1. Определение и сходимость степенного ряда.

Определение 1. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_k(x - x_0)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

где a_k, x, x_0 – действительные числа, членами которого являются степенные функции, называется ***степенным рядом*** по степеням $(x - x_0)$, а числа a_k – ***коэффициентами*** степенного ряда.

При $x_0 = 0$ имеем ***степенной ряд по степеням*** x

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

Поскольку заменой $x - x_0 = X$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ можно свести к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, то будем рассматривать ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ всегда сходится в точке $x = 0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 1 (Абеля). *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в интервале* $-|x_0| < x < |x_0|$ *и сходится равномерно на отрезке* $-q \le x \le q$, *где* $0 < q < |x_0|$.

► Так как по условию теоремы числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ сходится, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0$. Следовательно, последовательность $\left(a_k x_0^k\right)_{k=0}^{\infty}$ ограничена. По определению ограниченной последовательности имеем

$$\forall k \in \mathbf{N} \ \ \exists\ M > 0 : \left| a_k x_0^k \right| < M \ .$$

Отсюда

$$\left| a_k \right| \le \frac{M}{\left| x_0 \right|^k} .$$

Пусть $|x| < |x_0|$.

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k x^k \right| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^k .$$

Члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^k$ – образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$. Поэтому этот ряд сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ в точке $x \ne 0$ сходится абсолютно.

Если $|x| \le q < |x_0|$, то $\left| \frac{x}{x_0} \right| \le \frac{q}{|x_0|} < 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M \left(\frac{q}{|x_0|} \right)^k$. По признаку Вейерштрасса, он сходится равномерно на отрезке $[-q; q]$. ◄

Следствие. *Если в точке* $x_1 \ne 0$ *степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *расходится, то он расходится во всех точках* x, *таких, что* $|x| > |x_1|$.

► Действительно, если бы ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходился в точке x, то по теореме Абеля он сходился бы абсолютно в точке x_1, что противоречит условию. ◄

2. Радиус сходимости и интервал сходимости. Из теоремы Абеля и следствия вытекает, что если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in (-R; R)$ и расходится для всех $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.

При $x = \pm R$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение 2. Число $R \geq 0$ называется ***радиусом*** сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, если степенной ряд сходится в каждой точке интервала $(-R; R)$ и расходится при $|x| > R$. Интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости***.

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех $x \in \mathbf{R}$, то $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда используют признаки Д'Аламбера и Коши.

Теорема 2. *Пусть для коэффициентов ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *существует предел* $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \neq 0$. *Тогда радиус сходимости находится по формуле Коши-Адамара*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

► Пусть $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = L \neq 0$. Тогда $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = L|x|$ и по признаку Коши при $L|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $L|x| > 1$ расходится. Следовательно,

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Если $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = L > 1$, то расходится не только числовой ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$, но и ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$, так как нарушается необходимый признак его сходимости:

$$L > 1 \;\Rightarrow\; |a_k| \to \infty \;\Rightarrow\; a_k \not\to 0 .◄$$

Замечание 1. Аналогично, если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$, то применяя признак Д'Аламбера, получим

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_k+1}\right| .$$

Пример. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!x^k$.

Решение. Имеем

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!} = 0 .$$

Значит, ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

Замечание 2. Степенной ряд общего вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ заменой $x - x_0 = X$ сводится к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Пусть R радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ сходится абсолютно при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Здесь число $R \ge 0$ называют ***радиусом сходимости***, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – ***интервалом сходимости*** степенного ряда..

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^k}{k\cdot 5^k}$.

Решение. Имеем

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{1}{k\cdot 5^k}}{\dfrac{1}{(k+1)\cdot 5^{k+1}}} = 5 \cdot$$

Значит, интервал сходимости $-5 < x-3 < 5$ или $-2 < x < 8$. В точке $x=-2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, а в точке $x=8$ – расходящийся гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2;8)$.

3. Свойства степенных рядов. Не ограничивая общности будем рассматривать ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Теорема 3. *Если радиус сходимости степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *отличен от нуля, то его сумма* $S(x)$ *непрерывна на интервале сходимости* $(-R;R)$.

► Пусть x – произвольная точка интервала сходимости. Всегда существует такое число $q>0$, что $|x|<q<R$. По теореме 1 степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[-q;q]\subset(-R;R)$. Тогда, согласно теореме о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда, $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-q;q]$. Следовательно, и в точке x. В силу произвольности выбора точки $x\in(-R;R)$ получаем непрерывность функции $S(x)$ на $(-R;R)$. ◄

Теорема 4. *Операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке* $[x_0;x]\subset(-R;R)$ *степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *не изменяют его радиуса сходимости.*

► Ограничимся рассмотрением случая, когда существует $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$. Обозначим через R_1 радиус сходимости почленно продифференцированного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k x^k\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Тогда

$$R_1=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{ka_k}{(k+1)a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=R\ .$$

Аналогично пусть R_2 – радиус сходимости ряда, полученного почленным интегрированием ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x}a_k t^k dt\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}-\frac{a_k}{k+1}x_0^{k+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}x_0^{k+1}\ .$$

Числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}x_0^{k+1}$ сходится абсолютно по признаку сравнения в силу неравенства $\left|\frac{a_k}{k+1}x_0^{k+1}\right|\le\left|a_k x_0^{k+1}\right|$, $k=0,1,\dots$, и сходимости ряда $|x_0|\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k x_0^k\right|$, так как $x_0\in(-R;R)$.

Значит,

$$R_2=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k(k+2)}{(k+1)a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=R\,.\ ◄$$

Теорема 5. *Если радиус сходимости степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ *отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости и для его суммы* $S(x)$ *справедливо равенство*

$$S'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}ka_k x^{k-1}\ .$$

► Пусть x – произвольная точка интервала сходимости $(-R;R)$, т.е. ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ сходится. Выберем такое число q, что $|x|<q<R$. На отрезке $[-q;q]\subset(-R;R)$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}ka_k x^{k-1}$, согласно теореме 4, сходится равномерно. Следовательно, на указанном

отрезке, а значит, и в точке x ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ можно почленно дифференцировать, и справедливо равенство

$$S'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}. \blacktriangleleft$$

Следствие. *Степенной ряд на интервале сходимости* $(-R;R)$, $R\neq 0$, *можно почленно дифференцировать любое число раз.*

► Действительно, так как результатом почленного дифференцирования степенного ряда является степенной ряд с тем же радиусом сходимости, то к нему применима теорема 5 и т.д. ◄

Теорема 6. *Степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *можно почленно интегрировать на любом отрезке* $[x_0;x]$, *принадлежащем интервалу сходимости.*

► Доказательство теоремы следует из равномерной сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ на отрезке $[x_0;x]\subset(-R;R)$ и теоремы о почленном интегрировании функционального ряда. ◄

Следствие. *Степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *можно почленно интегрировать любое число раз на отрезке* $[x_0;x]\subset(-R;R)$.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^k x^{2k}+\ldots,$$

полученный почленным дифференцированием исходного ряда. Так как члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(-x^2\right)$, то его сумма $S(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, если $|x|<1$.

Интегрируя ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ почленно на отрезке $[0;x]\subset(-1;1)$, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{arctg} x, \quad |x| < 1.$$

Таким образом, функция $y = \operatorname{arctg} x$ является суммой исходного ряда.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется степенным?
2. Сформулируйте и докажите теорему Абеля.
3. Что называется радиусом сходимости и интервалом сходимости степенного ряда?
4. Перечислите свойства степенных рядов.

Лекция 6. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

1.Разложение функций в степенные ряды.
2. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.
3. Некоторые приложения степенных рядов

1. Разложение функций в степенные ряды.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) + (x-x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots$$

называется ***рядом Тейлора*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots$$

и называется ***рядом Маклорена***.

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ может быть как равным нулю, так и отличным от него, причем в последнем случае сумма $S(x)$ ряда Тейлора может не совпадать с $f(x)$. Важно определить, когда в формуле

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

допустим знак равенства, т.е. когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен. Если $S(x) = f(x)$ на $(x_0 - R; x_0 + R)$, то говорят, что функция $f(x)$ ***разложима в ряд Тейлора в окрестности точки*** x_0.

Частичные суммы ряда Тейлора

$$S_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

представляют собой многочлены Тейлора $P_n(x)$ функции $f(x)$ в точке x_0. Если ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, справедливо равенство

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

Теорема 1 (Тейлора). *Пусть 1) функция* $f(x)$ *имеет в окрестности* $U(R;x_0)$ *точки* x_0 *производные любого порядка;*

2) $\forall x\in U(R;x_0)$ *выполняется условие* $\left|f^{(k)}(x)\right|\le M\,\dfrac{k!}{R^k}$, $k=0,1,2,\dots$. *Тогда функция* $f(x)$ *разлагается на множестве* $U(R;x_0)$ *единственным образом:*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\dots.$$

► *Разложение.* Известно, что для функции $y=f(x)$ в окрестности $U(R;x_0)$, то $\forall x\in U(R;x_0)$ при $x\to x_0$ имеет место формула Тейлора

$$f(x)=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, $\xi\in U(R;x_0)$, или Пеано $R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^{n+1}\right)$.

Согласно условию 2) теоремы 1 имеем $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\le M\,\dfrac{(n+1)!}{R^{n+1}}$.

Тогда

$$\left|R_{n+1}(x)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}\le M\,\frac{(n+1)!}{R^{n+1}(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}=$$
$$=M\left(\frac{|x-x_0|}{R}\right)^{n+1}.$$

Поскольку $|x-x_0|<R$, то $\left|\dfrac{x-x_0}{R}\right|<1$. Поэтому $\left|R_{n+1}(x)\right|\to 0$

при $n \to \infty$.

Аналогично с остаточным членом в виде Пеано имеем $\left|R_{n+1}(x)\right| \to 0$ при $n \to \infty$.

Переходя в формуле Тейлора к пределу при $n \to \infty$, получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Единственность. Пусть существует еще одно разложение в степенной ряд функции $y = f(x)$ в окрестности $U(R; x_0)$:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n + \ldots .$$

где хотя бы один из коэффициентов b_k отличен от $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Последовательно дифференцируя почленно этот ряд бесконечное число раз, получим

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)^2 + \ldots + nb_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)b_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots,$$

.... ,

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 \cdot b_n + (n+1)n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 \cdot b_{n+1}(x - x_0) + \ldots$$

....

Полагая в этих равенствах и в исходном ряде $x = x_0$, имеем:

$$b_0 = f(x_0),\ b_1 = f'(x_0),\ b_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots .$$

Сравнивая найденные коэффициенты b_k с коэффициентами ряда Тейлора, заключаем, что $b_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ для $k = 0,1,2,\ldots$. Отсюда следует единственность разложения. ◄

Следствие 1. *Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы остаток в формуле Тейлора стремился к нулю:*

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Следствие 2. *Если для любых $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой*

M, то ряд Тейлора $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ *сходится к функции* $f(x)$ *в интервале* $|x-x_0|<R$.

► Согласно представлению остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа, имеем

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le M\ \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\quad \forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку Д'Аламбера. Тогда на основании необходимого признака сходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad \forall x\in(x_0-R;x_0+R)$.◄

2. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Если в формуле Тейлора положить $x_0=0$, то имеем формулу Маклорена

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots.$$

Получим разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

1. $f(x)=e^x$.

Имеем $f^{(k)}(x)=e^x$ и $\left|f^{(k)}(x)\right|=\left|e^x\right|<e^A$ при $|x|<A$, где A – сколь угодно большое положительное число. Тогда на основании теоремы 1 заключаем, что функция $f(x)=e^x$ разложима в ряд Маклорена, сходящийся к ней при любом $x\in\mathbf{R}$. Поскольку $a_k=\frac{f^k(0)}{k!}=\frac{1}{k!}$, то

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

2. $f(x)=\mathrm{ch}\,x$.

Используя разложение $e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, определение функции $y=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и свойство суммы сходящихся рядов, $\forall\ x\in\mathbf{R}$ имеем:

$$\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-x)^k}{k!}\right)\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+(-1)^k\right)\frac{x^k}{k!}.$$

Отсюда $\operatorname{ch}x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots$

3. $f(x)=\operatorname{sh}x$.

Так как $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=(\operatorname{ch}x)'$, то на основании теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда, получаем разложение $x\in\mathbf{R}$

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

4. $f(x)=\sin x$.

Так как $f^{(k)}(x)=\sin^{(k)}x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}k\right)$ и $\left|f^{(k)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}k\right)\right|\le 1$ $\forall x\in\mathbf{R}$, то $\forall x\in\mathbf{R}$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Здесь используется условие

$$a_k=\frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{k!}=\begin{cases}0, & \text{если } k=2n,\\ \dfrac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{если } k=2n+1.\end{cases}$$

5. $f(x)=\cos x$.

Из равенства $\cos x=(\sin x)'$ на основании теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда получаем искомое разложение

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}\quad\forall x\in\mathbf{R}.$$

6. $f(x)=\ln(1+x)$.

На основании теоремы о почленном интегрировании степенного ряда с учетом выражения для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k\right)dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{k+1}}{k+1},$$

т.е. $\forall x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

7. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

В данном случае оценка производных $f^{(k)}(x)$ является затруднительной.

Поэтому воспользуемся известным разложением $\forall x\in(-1;1)$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\ldots=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$

называется ***биномиальным рядом***.

При $\alpha=n\in\mathbf{N}$ все коэффициенты данного ряда, начиная с номера $n+1$, обращаются в нуль, и степенной ряд преобразуется в бином Ньютона

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{n!}x^2+\ldots+x^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k.$$

3. Некоторые приложения степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций. Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точке x_0 с заданной точностью поступают следующим образом. Функцию $f(x)$ раскладывают в ряд по степеням $x-x_1$ в интервале сходимости, содержащим точку x_0. Точка x_1 – это точка, в которой значения функции и ее производных вычисляются точно. Переменной x придается значение x_0. В полученном числовом ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0 - x_1)^k$ оставляются только члены, гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число n_0 таких членов ряда определяется из соответствующей оценки либо остатка $R_n(x_0)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора, так как в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

Пример. Вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ число e.

Решение. Так как,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1},\ 0 < \xi < x,\ \forall x \in \mathbf{R},$$

то из оценки

$$|R_n(1)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \le 0{,}01$$

следует, что $n \ge 5$, т.е. $n_0 = 5$. Полагая $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, получим

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2 + 0{,}500 + 0{,}167 + 0{,}042 + 0{,}008 = 2{,}717\ .$$

Приближенное вычисление интегралов. Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов.

Пример. Вычислить $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Имеем $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

Тогда

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{1/3} x^{2k} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}.$$

Отсюда

$$|r_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)3^{2n+3}} \le 0{,}001 \ \Rightarrow\ n \ge 1 \Rightarrow n_0 = 1$$

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} \approx 0,3333 - 0,0123 = 0,3210 \ .$$

Окончательно получаем

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx 0,321$$

с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Интегрирование дифференциальных уравнений. Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решения не удается найти в элементарных функциях.

Пример. Найти решение уравнения

$$yy' = \sin y \ .$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение $yy' = \sin y$ допускает разделение переменных:

$$\frac{ydy}{\sin y} = dx \ .$$

Однако интеграл от левой части уравнения не выражается в элементарных функциях. В окрестности $x_0 = 0$ уравнение удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Будем искать его в виде ряда Маклорена

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n \ .$$

Так как $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$ и $y' = \dfrac{\sin y}{y}$, то $y'(0) = \dfrac{2}{\pi}$. Дифференцируя по x обе части равенства $y' = \dfrac{\sin y}{y}$, находим

$$y'' = \frac{(y'\cos y)y - y'\sin y}{y^2} = \frac{y'(y\cos y - \sin y)}{y^2} \ .$$

Откуда $y''(0) = \dfrac{-y'(0)\sin(\pi/2)}{(\pi/2)^2} = -\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^3$.

Дифференцируя обе части найденного равенства для y'', находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y = y(x)$:

$$y = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}x - \frac{2^2}{\pi^3}x^2 + \ldots .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какой степенной ряд называется рядом Тейлора для функции $y = f(x)$? Как из него получить ряд Маклорена?

2. Сформулируйте и докажите теорему Тейлора о разложении функции ряд Тейлора.

3. Получите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.

4. Какие основные приложения формулы Тейлора?

Тема 2
РЯДЫ ФУРЬЕ
Лекция 1
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Метрические пространства.
2. Линейные пространства.
3. Гильбертовы пространства.

1. Метрические пространства.

Определение 1. Если для произвольной упорядоченной пары $(x;y)$ элементов x и y множества X определена функция $\rho(x,y)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\rho(x,y)\geq 0$, причем $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда выполняется $x=y$;

2) для любых x и y имеет место равенство $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

3) для любых трех элементов x, y и z выполняется неравенство (называемое неравенством треугольника)

$$\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z),$$

то множество X называется ***метрическим пространством***.

Функция $\rho(x,y)$ называется ***расстоянием*** или ***метрикой***. Элементы метрического пространства называются ***точками***.

Метрические пространства, элементами которых являются функции, называются ***функциональными метрическими пространствами***.

Пространство $B(X)$ – ограниченных на множестве X функций. Множество $B(X)$ всех действительных ограниченных на некотором множестве X функций образует метрическое пространство с расстоянием

$$\rho(f;g)=\sup_{x\in X}\left|f(x)-g(x)\right|, \qquad (1)$$

где $f(x)$, $g(x)$ $\in B(X)$.

Действительно, выполнение в этом случае условий 1) и 2) для расстояния (1) очевидно. Докажем, что расстояние (1) удовлетворяет и третьему условию определения 1.

Для любых трех функций f, g и h. принадлежащих множеству $B(X)$, и любого $x\in X$ выполняется неравенство

$$|f(x)-h(x)|=|[f(x)-g(x)]+[g(x)-h(x)]|\le$$
$$\le|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\le\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in X}|g(x)-h(x)|.$$

Перейдя в левой части этого неравенства к верхней грани, получим

$$\sup_{x\in X}|f(x)-h(x)|\le\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in X}|g(x)-h(x)|.$$

Согласно условию 3) определения 1 неравенство треугольника выполняется.

В случае $X=[a;b]$ множество ограниченных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $B([a;b])$ или $B_{[a;b]}$.

П р о с т р а н с т в о $CL_{[a;b]}$ – н е п р е р ы в н ы х н а о т р е з к е $[a;b]$ ф у н к ц и й. Множество $CL_{[a;b]}$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций является метрическим пространством с расстоянием

$$\rho(f;g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx, \qquad (2)$$

где $f(x)$, $g(x)$ $\in CL_{[a;b]}$.

► Очевидно, $\rho(f,g)>0$.

Если $\rho(f,g)=0$, то $\rho(f;g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx=0$.

Поскольку $|f(x)-g(x)|$ является неотрицательной непрерывной функцией, то для всех $x\in[a;b]$, в силу свойств определенного интеграла выполняется равенство

$$|f(x)-g(x)|=0.$$

Это означает, что $\forall\ x\in[a;b]$ имеет место равенство $f(x)=g(x)$.

Условие 2) очевидно.

Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)\in CL_{[a;b]}$, то, интегрируя по отрезку $[a;b]$ неравенство

$$|f(x)-h(x)|\le|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|,$$

получим

$$\int_a^b |f(x)-h(x)|dx \le \int_a^b |f(x)-g(x)|dx + \int_a^b |g(x)-h(x)|dx .$$

Следовательно, $\rho(f,h) \le \rho(f,g)+\rho(g,h)$. ◄

Всякое подмножество метрического пространства является также метрическим пространством с тем же самым расстоянием и называется ***подпространством*** исходного пространства.

Если X и Y - метрические пространства и отображение $f: X \to Y$ является биекцией. т.е. взаимно однозначно отображает множество X на множество Y и сохраняет расстояние (для любых точек $x \in X$ и $y = f(x) \in Y$ выполняется равенство $\rho(f(x_1); f(x_2)) = \rho(x_1; x_2)$), то отображение f называется ***изометрией***, или ***изометрическим отображением*** X на Y, а метрические пространства X и Y – ***изометрическими***.

Определение 2. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек метрического пространства называется ***сходящейся*** к точке x этого пространства, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n; x) = 0$.

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Примеры. **1.** Рассмотрим сходимость последовательности функций в пространстве $B(X)$. Если $f_n(x) \in B(X)$ и $f(x) \in B(X)$ и в смысле метрики пространства $B(X)$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, то определению расстояния в $B(X)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Это есть не что иное, как определение равномерной сходимости.

Таким образом, сходимость в пространстве $B(X)$ означает равномерную сходимость.

2. Рассмотрим сходимость в пространстве $CL_{[a;b]}$.

Последовательность функций $f_n \in CL_{[a;b]}$ сходится к функции $f(x) \in CL_{[a;b]}$ в пространстве $CL_{[a;b]}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0 .$$

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек метрического пространства называется ***фундаментальной***, или ***последовательностью Коши***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(x_n; x_m) < \varepsilon$.

Лемма 1. *Если последовательность точек метрического пространства сходится, то она является фундаментальной последовательностью.*

Без доказательства.

О п р е д е л е н и е 4. Метрическое пространство называется ***полным***, если всякая его фундаментальная последовательность сходится.

Пример. Пространство $B(X)$ является полным функциональным пространством. Действительно, сходимость в пространстве $B(X)$ означает равномерную сходимость. Отсюда, согласно критерию Коши равномерной сходимости следует, что всякая фундаментальная в пространстве $B(X)$ последовательность равномерно сходится. Поскольку предел равномерно сходящейся последовательности ограниченных функций также является ограниченной функцией, то этот предел принадлежит пространству $B(X)$. Это означает полноту пространства $B(X)$.

2. Линейные пространства.

О п р е д е л е н и е 5. Множество X называется ***линейным пространством***, если для его элементов определены операции сложения элементов и умножения элементов на число, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $x + y = y + x \quad \forall\ x,\ y \in X$,

2) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall\ x,\ y,\ z \in X$,

3) $\exists\ 0 \in X :\ \forall\ x \in X \quad x + 0 = 0 + x = x$,

4) $\forall\ x \in X \ \ \exists\ (-x) \in X :\ x + (-x) = -x + x = 0$,

5) $\forall\ x \in X \ \ \forall\ \lambda,\ \mu \in \boldsymbol{R} \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \forall\ x \in X,\ \forall\ \lambda,\ \mu \in \boldsymbol{R}$,

7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall\ x,\ y \in X,\ \forall\ \lambda \in \boldsymbol{R}$.

О п р е д е л е н и е 6. Линейное пространство X называется ***нормированным***, если на нем задана такая действительная функция $\|x\|$, называемая ***нормой***, что

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall \ x \in X$

2) (однородность) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \ x \in X \quad \forall \ \lambda$,

3) (неравенство треугольника) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall \ x, \ y \in X$,

4) если $\|x\| = 0$, то $x = 0$.

Если в качестве чисел берутся комплексные числа, то линейное нормированное пространство называется ***комплексным,*** а если только действительные, то — ***действительным***.

Если для функции $\|x\|$ выполняются условия 1), 2), 3), то эта функция называется ***полунормой,*** а линейное пространство X — ***полунормированным***.

Очевидно, что норма пространства является и полунормой. Норма (полунорма) $\|x\|$ пространства X *обозначается* также $\|\cdot\|_X$.

Функция, определенная на некотором множестве функций, называется ***функционалом***.

Примеры. 1. В линейном метрическом пространстве $B(X)$ действительных ограниченных функций, определенных на некотором множестве X, функционал

$$\|f(x)\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in B(X)$$

является нормой.

2. В линейном пространстве абсолютно интегрируемых на интервале $(a;b)$, конечном или бесконечном, функций f функционал

$$\|f(x)\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

является полунормой. Это полунормированное пространство обозначается $RL_{(a;b)}$.

3. В линейном пространстве $CL_{(a;b)}$ непрерывных на интервале $(a;b)$ функций f, принадлежащих пространству $RL_{(a;b)}$, функционал

$$\| f(x) \| = \int_a^b | f(x) | dx$$

является нормой.

Лемма 2. *Если* X *– нормированное пространство, то функция* $\rho(x;y) = \|x - y\|$ *является метрикой в* X.

Без доказательства.

Итак, всякое нормированное пространство является и метрическим пространством с метрикой $\rho(x;y) = \|x - y\|$.

Определение 7. Полное нормированное пространство называется ***банаховым*** пространством.

Полнота понимается здесь в смысле метрики, порожденной нормой пространства.

3. Гильбертовы пространства. Будем рассматривать только действительные линейные пространства.

Определение 8. Пусть X — линейное пространство. Числовая функция, обозначаемая

$$(x, y), \ x, \ y \in X,$$

заданная на множестве упорядоченных пар точек пространства X, называется ***скалярным произведением***, если $\forall \ x, \ y \in X$ и $\forall \ \lambda, \ \mu \in \boldsymbol{R}$ выполняются следующие условия:

1) коммутативность: $(x, y) = (y, x)$;

2) линейность: $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$;

3) $(x, x) \geq 0$;

4) если $(x, x) = 0$, то $x = 0$ ..

Функция (x, y), удовлетворяющая условиям 1), 2) и 3), называется ***почти скалярным произведением***.

Очевидно, что скалярное произведение является и почти скалярным.

Свойства скалярного произведения

1. *Если* (x, y) *— почти скалярное произведение в линейном пространстве* X*, то* $\forall \ x, \ y \in X$ *выполняется неравенство Коши - Буняковского:*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}.$$

2. *Для любых точек* x, $y \in X$ *имеет место неравенство треугольника*

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \le \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}.$$

3. *Если* (x,y) *- почти скалярное (в частности, скалярное) произведение в линейном пространстве* X *, то функция*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

является полунормой (соответственно нормой) в этом пространстве, и неравенство Коши - Буняковского можно записать в виде

$$|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|.$$

Примеры. **1.** Множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ является пространством со скалярным произведением, если под скалярным произведением (x,y) чисел x и y понимать их обычное произведение: $(x,y) = x \cdot y$.

2. Обозначим через $RL_{2(a;b)}$ множество функций f, заданных на некотором конечном или бесконечном интервале $(a;b)$, для каждой из которых существует правильное разбиение этого интервала и интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)dx$ сходится. Множество $RL_{2(a;b)}$ является линейным пространством. Функционал

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx, \quad f, g \in RL_{2(a;b)},$$

является почти скалярным произведением,

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}, \quad f \in RL_{2(a;b)}$$

полунормой пространства $RL_{2(a;b)}$.

3. На подпространстве $CL_{2(a;b)} \subset RL_{2(a;b)}$, состоящем из непрерывных на интервале $(a;b)$ функций f, для которых сходится интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)dx$, функционал

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx, \quad f, g \in CL_{2(a;b)}$$

является уже скалярным произведением, а

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \;\; f \in CL_{2(a;b)},$$

нормой.

Определение 10. Полное линейное пространство со скалярным произведением называется ***гильбертовым пространством***.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение метрического пространства. Приведите примеры метрических пространств.
2. Какое метрическое пространство называется полным?
3. Дайте определение линейного пространства.
4. Какое линейное пространство называется нормированным?
5. Что называется скалярным произведением для элементов линейного пространства?
6. Какими свойствами обладает скалярное произведение?
7. Какое пространство называется гильбертовым пространством?

Лекция 2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

1. Пространство кусочно-непрерывных функций.
2. Основная тригонометрическая система функций.

1. Пространство кусочно-непрерывных функций. При изучении возможности представления функции рядом Тейлора в точке x_0 предполагалось, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки. Множество бесконечно дифференцируемых функций достаточно узко. Представление же функций рядами Фурье допускает более широкий класс кусочно-непрерывных функций.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ***кусочно-непрерывной*** на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Пример. Функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\le x<1, \\ 0{,}5x^2, & \text{если } 1\le x<2, \\ 0{,}5(x+1), & \text{если } 2\le x\le 4, \end{cases}$$

является кусочно-непрерывной на отрезке $[0;4]$ (рис.1).

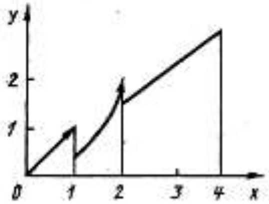

Рис.1. График кусочно-непрерывной функции

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция. В любой точке разрыва $x_0\in[a;b]$ такой функции существуют односторонние пределы $f(x_0\pm 0)$. Поэтому на каждом участке непрерывности существуют определенные интегралы Римана $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b f^2(x)dx$. Значит, кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема вместе со своим квадратом на

$[a;b]$. Функция $f(x)$ в этом случае называется *функцией с интегрируемым квадратом*.

Так как на множестве кусочно-непрерывных функций определены линейные операции, удовлетворяющие аксиомам линейного пространства, то это множество образует линейное пространство. Введем на нем операцию скалярного произведения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Определение 2. ***Скалярным произведением*** функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx. \qquad (1)$$

На рассматриваемом множестве скалярное произведение функций (1) существует и обладает следующими свойствами:

1) $(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$;

2) $(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)$;

3) $(\lambda\varphi,\psi)=\lambda(\varphi,\psi) \quad \forall\lambda\in \boldsymbol{R}$;

4) $(\varphi,\varphi)\geq 0$, $(\varphi,\varphi)=0 \Leftrightarrow \varphi=0$,

т.е. удовлетворяет аксиомам метрического пространства.

Множество всех кусочно-непрерывных на $[a;b]$ функций со скалярным произведением, определенным по формуле (1), обозначается $L_2[a;b]$ и называется ***пространством*** L_2. Пространство L_2 – бесконечномерное.

Пример. Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. Имеем

$$(\varphi,\psi)=\int_0^1 xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.$$

Определение 3. Неотрицательное число

$$\|\varphi\|=\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}$$

называется ***нормой*** функции $\varphi(x)$ в пространстве $L_2[a;b]$.

Учитывая, что $\int_a^b \varphi^2(x)dx=(\varphi,\varphi)$, норму функции можно записать в виде

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)}\,. \qquad (2)$$

Функция $\varphi(x)$ называется ***нормированной***, если ее норма равна единице.

Пример. Вычислить норму функции $\varphi(x)=\sin x$ в $L_2[0;\pi]$.

Решение. Так как

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

то $\|\varphi\| = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Определение 4. Две функции $\varphi(x)\in L_2[a;b]$ и $\psi(x)\in L_2[a;b]$ называются ***ортогональными*** на отрезке $[a;b]$, если их скалярное произведение на $[a;b]$ равно нулю, т.е.

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0\,.$$

Пример. Функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ являются ортогональными на отрезке $[-1;1]$, так как

$$(\varphi,\psi)=\int_{-1}^1 xx^2 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^1 = 0\,.$$

Заметим, что эти функции уже не являются ортогональными на отрезке $[0;1]$, поскольку $(\varphi,\psi)\neq 0$ на $[0;1]$.

Определение 5. Система функций

$$(\varphi_n(x))=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots)$$

(конечная или бесконечная) называется ***ортогональной*** на отрезке $[a;b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на $[a;b]$, т.е.

$$(\varphi_m,\varphi_n)=0\,,\ \forall m\neq n\,,\ m,n\in \boldsymbol{N}\,.$$

Определение 6. Ортогональная система функций ($\varphi_n(x)$) на отрезке $[a;b]$ называется ***ортонормированной***, если

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi_n,\varphi_n)=\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1 \quad \forall n\in \boldsymbol{N}\,.$$

Любую ортогональную на $[a;b]$ систему функций ($\varphi_n(x)$) с $\|\varphi\| \neq 0 \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$ можно нормировать. Для этого достаточно разделить каждую функцию системы ($\varphi_n(x)$) на ее норму. В результате получим ортонормированную систему функций $\left(\dfrac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right)$.

Пример. Доказать, что бесконечная система функций

$$(\sin nx) = (\sin x, \sin 2x, ..., \sin nx, ...)$$

является ортогональной на $[-\pi;\pi]$, и пронормировать ее.

Решение. Согласно определению, для любых $m \neq n$, $m,n \in \boldsymbol{N}$, скалярное произведение функций данной системы должно быть равным нулю.

Действительно,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx = 0$$

.

Норма любой функции системы отлична от нуля. В самом деле, для любого $n \in \boldsymbol{N}$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi .$$

Следовательно, $\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi} > 0 \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$.

Если разделить каждый член ортогональной на $[a;b]$ системы ($\varphi_n(x)$) на норму $\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi}$, то получим ортонормированную на отрезке $[-\pi;\pi]$ систему функций:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, ...\right).$$

Понятие ортогональности системы функций аналогично понятию ортогональности векторов. Каждую функцию из множества кусочно-непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций ($f(x) \in L_2[a;b]$) можно рассматривать как бесконечный вектор (число координат этого вектора (его размерность) – множество всех действительных чисел отрезка $[a;b]$). Тогда введенное по формуле (1) понятие скалярного произведения двух функций, принадлежащих множеству $L_2[a;b]$, является обобщением скалярного произведения двух векторов n-мерного евклидова векторного пространства.

2. Основная тригонометрическая система функций.

Определение 7. ***Основной тригонометрической системой функций*** на отрезке $[-l;l]$ называется система

$$\left(1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, ...\right). \quad (2)$$

Теорема 1. *Основная тригонометрическая система функций (2) является ортогональной на любом отрезке длиной* $2l$*, например на отрезке* $[-l;l]$*, причем норма первого члена системы равна* $\sqrt{2l}$ *, а любого другого* $\sqrt{l}$ *.*

► Докажем вначале, что система (2) является ортогональной. Имеем

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}dx + \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}dx =$$

$$= \left.\left(\frac{1}{2}\frac{l}{m-n}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l} + \frac{1}{2}\frac{l}{m+n}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\right|_{-l}^{l} = 0 .$$

Аналогично доказывается равенство нулю остальных интегралов:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad \forall\ n \in \boldsymbol{N} ,$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad \forall\ n \in \boldsymbol{N} ,$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad \forall m,n \notin \boldsymbol{N} ,\ m \neq n ,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad \forall m,n \notin \boldsymbol{N} ,\ m \neq n ,$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad \forall m, n \notin \boldsymbol{N}\ ,\ m \neq n\,.$$

Вычислим норму первого члена основной тригонометрической системы функций. Так как

$$\|1\|^2 = \int_{-l}^{l}(1)^2\,dx = x\Big|_{-l}^{l} = 2l\,,$$

то $\|1\| = \sqrt{2l}$.

Найдем норму произвольного члена системы, содержащего косинусы:

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2 = \int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2\pi nx}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l} = l \Rightarrow \left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l}\,,\ \forall\ n \in \boldsymbol{N}\,.$$

Аналогично доказывается, что $\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l}\ \ \forall\ n \in \boldsymbol{N}$. ◄

Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке, равном периоду $T = 2l$.

В таблице 1 приведены примеры тригонометрических ортогональных систем функций и указаны нормы их элементов.

Таблица 1. Ортогональные системы функций

№	Ортогональная система функций	Отрезок ортогональности	Нормы
1	$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$	$[-\pi;\pi]$	$\|1\| = \sqrt{2\pi}$, $\|\sin nx\| = \|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$
2	$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \ldots$	$[0;l]$	$\|1\| = \sqrt{l}$, $\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{\frac{l}{2}}$
3	$\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,$	$[0;l]$	$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{\frac{l}{2}}$

	$\sin\frac{n\pi x}{l}$, …		
4	1, $\cos x$, $\cos 2x$, …, $\cos nx$, …	$[0;\pi]$	$\|1\| = \sqrt{\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
5	$\sin x$, $\sin 2x$, …, $\sin nx$, …	$[0;\pi]$	$\|\sin nx\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Замечание. Ортогональная система функций, расположенная в первой строке таблицы 1, получается из основной тригонометрической системы функций при $l = \pi$, а ортогональные системы функций, приведенные в четвертой и пятой строках, – также при $l = \pi$ из систем функций, записанных во второй и третьей строках таблицы соответственно.

Пример. Ортогональной нетригонометрической системой функций является система ***многочленов Лежандра***, определяемая следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - n\right)^n,\ n = 0,1,...$$

Запишем несколько членов этой системы:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right),\ P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right),$$

…………………………………

Система многочленов Лежандра является ортогональной на отрезке $[-1;1]$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется кусочно-непрерывной?
2. Что называется скалярным произведением функций и какими свойствами оно обладает?
3. Какая система функций называется ортогональной и ортонормированной?

4. Запишите основную тригонометрическую систему и докажите, что ее ортогональность.

5. Докажите, что система многочленов Лежандра является ортогональной.

Лекция 3. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

1. Обобщенный ряд Фурье.
2. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.
3. Неравенство Бесселя и его следствия.

1. Обобщенный ряд Фурье. Пусть $(\varphi_n(x))$ – ортогональная система функций в $L_2[a;b]$.

Определение 1. Выражение

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x). \qquad (1)$$

называется ***обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций*** $(\varphi_n(x))$. Если $(\varphi_n(x))$ – основная тригонометрическая система функций, то ряд (1) называется ***тригонометрическим рядом Фурье***.

Пусть $f(x)\in L_2[a;b]$. Требуется выяснить, при каких условиях и для каких $x\in[a;b]$ произвольную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по ортогональной системе функций $(\varphi_n(x))$ т.е. представить $f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x). \qquad (2)$$

где c_n – числовые коэффициенты.

Найдем коэффициенты c_n ряда (2).

Предположим, что разложение (2) имеет место и интеграл от функции равен сумме интегралов от членов ряда. Умножим обе части разложения (2) на $(\varphi_n(x))$ и почленно проинтегрируем результат на отрезке $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=$$

$$= c_0 \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_n(x)dx + c_1 \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_n(x)dx + \ldots + c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx + \ldots .$$

Так как система функций ($\varphi_n(x)$) является ортогональной, то все интегралы из правой части последнего равенства, за исключением интеграла с коэффициентом c_n, обратятся в нуль. Таким образом, имеем

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx, \; n = 0,1,\ldots$$

Запишем полученное уравнение, использовав понятия скалярного произведения и нормы функции:

$$(f, \varphi_n) = c_n \|\varphi_n\|^2,$$

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \; n = 0,1,\ldots \qquad (3)$$

Следовательно, ряд (2) по ортогональной на отрезке $[a;b]$ системе функций ($\varphi_n(x)$), соответствующий функции $f(x)$, с учетом формул (3) можно записать в виде

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n(x), \qquad (4)$$

Числа c_n, определяемые по формуле (3), называются ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$ по ортогональной системе функций ($\varphi_n(x)$).

Используя ортогональную на отрезке $[a;b]$ систему функций ($\varphi_n(x)$), для любой функции $f(x) \in L_2[a;b]$ можно формально составить обобщенный ряд Фурье (4), вычислив его коэффициенты по формулам (3). Однако вопрос о сходимости обобщенных рядов Фурье остается открытым. В частности, неизвестно, является ли сумма формально записанного обобщенного ряда Фурье равной $f(x)$ (даже если и окажется, что формально записанный обобщенный ряд Фурье сходится, то его сумма может не совпасть с разложимой функцией $f(x)$). Итак, пока не выяснен вопрос о том, сходится ли обобщенный ряд Фурье к соответствующей функции $f(x)$, будем говорить, что *обобщенный ряд Фурье порожден функцией* $f(x)$. Эту формальную связь функции $f(x)$ и порожденного ею ряда Фурье обычно записывают так:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Рассмотрим пример формального составления обобщенного ряда Фурье.

Пример. Записать первые три коэффициента разложения функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Решение. Ортогональная на $[-1;1]$ система полиномов Лежандра задается условием

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,\ n=0,1,...$$

Первые три члена этой системы имеют вид:

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right).$$

Запишем обобщенный ряд Фурье для функции $f(x)=e^x \in L_2[-1;1]$:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

и найдем три первых члена искомого разложения, использовав формулы (3):

$$c_0=\frac{(f,P_0(x))}{\|P_0(x)\|^2},\ c_1=\frac{(f,P_1(x))}{\|P_1(x)\|^2},\ c_2=\frac{(f,P_2(x))}{\|P_2(x)\|^2}$$

Вычислим квадраты нормы многочленов Лежандра:

$$\|P_0(x)\|^2=\int_{-1}^{1}dx=2,\qquad \|P_1(x)\|^2=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$\|P_2(x)\|^2=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right)dx=\frac{2}{5}.$$

Тогда

$$c_0=\frac{1}{2}(f,P_0(x))=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^x dx=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right),$$

$$c_1=\frac{3}{2}\left(f,P_1(x)\right)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}e^x x dx=\frac{3}{e},$$

$$c_2=\frac{5}{2}\left(f,P_2(x)\right)=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}e^x\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)dx=\frac{5}{2}\left(e-\frac{7}{e}\right).$$

Обобщенный ряд Фурье, порожденный функцией $f(x)=e^x\in L_2[-1;1]$, запишется в виде

$$e^x\sim\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)+\frac{3}{e}x+\frac{5}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)+\ldots$$

2. Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. В математике используются различные понятия близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ (рис.1). Она может оцениваться, например, величинами $\max\limits_{[a;b]}|f(x)-\varphi(x)|$, $\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|dx$, $\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^2dx$, в зависимости от существования указанных величин или смысла решаемой задачи. Так, при приближении (аппроксимации) функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ за меру погрешности можно взять *наибольшее уклонение функций* $\max|f(x)-\varphi(x)|$ $\forall x\in[a;b]$.

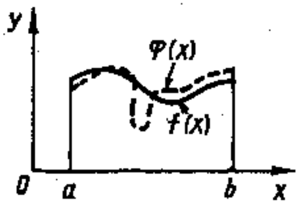

Рис.1. Близость функций

В ряде случаев (рис.1.) подобная оценка погрешности не совсем удобна, так как функция $\varphi(x)$ значительно отличается от функции $f(x)$ только на достаточно малом интервале, содержащемся в отрезке $[a;b]$, в то время как почти на всем отрезке она близка к $f(x)$. Поэтому за меру уклонения функции $f(x)$ от $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ часто принимается число ρ, называемое ***средним квадратичным уклонением*** и определяемое соотношением

$$\rho = \rho(f,\varphi) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx}.$$

Величина $\rho \ge 0$ имеет смысл для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ из $L_2[a;b]$, поэтому она называется ***метрикой*** или ***расстоянием*** в $L_2[a;b]$. Величина $\rho(f,\varphi)$ характеризует близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ *в среднем квадратичном*.

Используя определение нормы функции, среднее квадратичное уклонение $\varphi(x)$ от $f(x)$ можно определить как норму разности $f(x) - \varphi(x)$ этих функций:

$$\rho = \rho(f,\varphi) = \| f(x) - \varphi(x) \|.$$

Рассмотрим вопрос о приближении функций с помощью обобщенных рядов Фурье.

Предположим, что обобщенный ряд Фурье (4) по ортогональной на отрезке $[a;b]$ системе функций ($\varphi_k(x)$) сходится в некотором смысле в точке $x \in [a;b]$ (или на всем отрезке $[a;b]$) к функции $f(x)$. Тогда функция $f(x)$ с любой степенью точности может быть приближенно представлена его частичной суммой, называемой ***ортогональным многочленом Фурье***:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x). \qquad (5)$$

Если при этом в качестве ортогональной системы функций выбрана основная тригонометрическая система (1, $\cos\frac{\pi}{l}x$, $\sin\frac{\pi}{l}x$, …, $\cos\frac{n\pi}{l}x$, $\sin\frac{n\pi}{l}x$, …), то многочлен Фурье называется ***тригонометрическим*** и обозначается $T_n(x)$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы функция $f(x) \in L_2[a;b]$, ортонормированная на $[a;b]$ система функций ($\varphi_k(x)$) и порядок n обобщенного многочлена $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$. Требуется подобрать коэффициенты α_k обобщенного многочлена таким образом, чтобы среднее квадратичное уклонение $\rho(f, S_n)$ было минимальным.

Если такие коэффициенты α_k найдутся, то говорят, что *обобщенный многочлен степени* n *аппроксимирует функцию* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *наилучшим образом в смысле минимума среднего квадратичного уклонения* $\rho(f, S_n)$ или *многочлен* $S_n(x)$ *аппроксимирует функцию* $f(x)$ *в среднем (в смысле метода наименьших квадратов)*.

Ответ на поставленную задачу дает следующая теорема.

Теорема 1 (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье). *Среди всех обобщенных многочленов вида* $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$, $\alpha_k \in \boldsymbol{R}$, *наилучшей средней квадратичной аппроксимацией функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *является многочлен Фурье, т.е. такой многочлен, коэффициенты которого находятся по формулам* $\alpha_k = c_k = \dfrac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

► Необходимо так подобрать коэффициенты α_k ортонормированного многочлена (5) степени n, чтобы норма разности функции $f(x)$ и многочлена $S_n(x)$

$$\rho(f, S_n) = \|f(x) - S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx}$$

принимала наименьшее значение.

Для определения коэффициентов α_k, $k = \overline{1, n}$, запишем квадрат нормы разности функций $f(x)$ и $S_n(x)$:

$$\rho^2(f, S_n) = \|f(x) - S_n(x)\|^2 = \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\int_a^b f(x) S_n(x)dx + \int_a^b S_n^2(x)dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\right)^2 =$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{k=0}^n \alpha_k c_k+\sum_{k=0}^n \alpha_k^2\|\varphi_k\|^2=\int_a^b f^2(x)dx+\sum_{k=0}^n(\alpha_k-c_k)^2-\sum_{k=0}^n c_k^2.$$

Очевидно, что первое и третье слагаемые в полученной формуле не зависят от коэффициентов α_k многочлена $S_n(x)$, в то время как второе слагаемое зависит от α_k, причем квадратичная аппроксимаций будет наилучшей, когда $\alpha_k=c_k$, т.е. когда аппроксимирующий многочлен является n-й частичной суммой обобщенного ряда Фурье. ◄

3. Неравенство Бесселя и его следствия.

Теорема 2 (неравенство Бесселя). $\int_a^b f^2(x)dx\geq\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2$

►В п.2 было доказано, что наилучшее приближение в среднем квадратичном к функции $f(x)\in L_2[a;b]$ дает n-я частичная сумма $S_n(x)=\sum_{k=0}^n c_k\varphi_k(x)$ ряда Фурье, причем

$$\min\rho^2(f,S_n)=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^n c_k^2$$

Отсюда, учитывая, что $\min\rho^2\geq 0$, имеем

$$\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^n c_k^2\geq 0\,.$$

Следовательно, $\sum_{k=0}^n c_k^2\leq\int_a^b f^2(x)dx$.

Из последнего неравенства, справедливого при любом $n\in\boldsymbol{N}$, следует сходимость ряда $\sum_{k=0}^n c_k^2$. Действительно, в левой части этого неравенства находятся n-е частичные суммы ряда $\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2$, образующие неубывающую и ограниченную сверху последовательность. Как известно, такая последовательность частичных сумм имеет предел. Найдем ее предел при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^2(x) \geq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k^2 .$$

Отсюда получаем неравенство Бесселя $\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$. ◄

Нетрудно видеть, что неравенство Бесселя в случае ортогональной (но не нормированной) последовательности функций принимает вид

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 .$$

С неравенством Бесселя связан ответ на вопрос о сходимости рядов Фурье. Так как ряд Фурье является функциональным, то его сходимость зависит от свойств функции $f(x)$, разлагаемой в ряд Фурье. Различают сходимость равномерную и сходимость в среднем квадратичном.

Определение 2. Ряд Фурье называется ***равномерно сходящимся*** к функции $f(x) \in L_2[a;b]$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) (ортогональных многочленов Фурье) сходится к функции $f(x)$ равномерно, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться равенство

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Из определения равномерной сходимости следует, что при $n \to \infty$ имеем

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S_n(x)| \to 0 .$$

Определение 3. Ряд Фурье называется ***сходящимся в среднем квадратичном*** к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) (многочленов Фурье) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0 .$$

Понятие сходимости в среднем квадратичном является обобщением понятия равномерной сходимости.

Теорема 3. *Если обобщенный ряд Фурье* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ *функции* $f(x)$ *сходится на отрезке* $[a;b]$ *равномерно к функции* $f(x) \in L_2[a;b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *на* $[a;b]$ *и в среднем квадратичном.*

► Пусть ряд Фурье функции $f(x) \in L_2[a;b]$ сходится к ней на отрезке $[a;b]$ равномерно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - S_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}} \quad \forall x \in [a;b].$$

Тогда для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\left|\int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx\right| = \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon .$$

Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0 . \blacktriangleleft$$

Теорема 4. *Для того чтобы обобщенный ряд Фурье* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ *функции* $f(x) \in L_2[a;b]$ *сходился к* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *в среднем квадратичном, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля – Стеклова*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (6)$$

►*Необходимость*. Из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ в среднем квадратичном к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho^2(f, S_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0 .$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n} c_k^2\right)dx=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k^2=\int_a^b f^2(x)dx$$

т.е. выполняется равенство Парсеваля – Стеклова.

Достаточность. Пусть выполняется равенство Парсеваля – Стеклова (6). Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k^2=\int_a^b f^2(x)dx.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2\right)dx=0$.

С другой стороны

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n} c_k^2\right)=\lim_{n\to\infty}\rho^2\left(f,S_n\right)=0 \qquad \forall x\in[a;b].$$

т.е. ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном. ◄

Определение 4. Ортогональная система функций ($\varphi_k(x)$), для которой выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, называется ***замкнутой*** в $L_2[a;b]$, а само равенство (6) – ***уравнением замкнутости***.

Из теоремы 4 следует, что любая функция $f(x)\in L_2[a;b]$ может быть разложена в сходящийся к ней в среднем квадратичном ряд Фурье по ортогональной на $[a;b]$ системе функций ($\varphi_k(x)$), если эта система является замкнутой в $L_2[a;b]$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое выражение называется обобщенным рядом Фурье?
2. Как находятся коэффициенты рядя Фурье?
3. Как измерить близость функций? Что называется среднеквадратичным уклонением функций?
4. Какое выражение называется ортогональным многочленом Фурье? Запишите тригонометрический многочлен Фурье.

5. Сформулируйте и докажите теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.

6. Что можно сказать о сходимости обобщенного ряда Фурье, если для него выполняется неравенство Бесселя?

7. Какая ортогональная система функций называется замкнутой?

Лекция 4. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

1. Ряд Фурье для периодической функции с периодом T .
2. Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье.
3. Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, непериодических функций
4. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье.

1. Ряд Фурье для периодической функции с периодом T . Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T=2l$. Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом $T=2l$. Рассмотрим основную тригонометрическую систему функций, ортогональную на любом интервале длиной $2l$, в частности на $[-l;l]$:

$$(\varphi_n(x))=\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right). \quad (1)$$

Ранее в лекции 2 были вычислены нормы функций, образующих ортогональную последовательность:

$$\|1\|=\sqrt{2l}\,,\ \|\sin nx\|=\|\cos nx\|=\sqrt{l}\ .$$

Основная тригонометрическая система функций обладает полнотой, т.е. для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом, имеет место равенство Парсеваля – Стеклова при $a=-l$, $b=l$:

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2\|\varphi_n\|^2\ . \quad (2)$$

Поэтому периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T=2l$ можно разложить в ряд Фурье, который будет сходиться к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)=$$

$$=c_0+c_1\cos\frac{\pi x}{l}+c_2\sin\frac{\pi x}{l}+c_3\cos\frac{2\pi x}{l}+c_4\sin\frac{2\pi x}{l}+\ldots .$$

С учетом того, что коэффициенты при косинусах принято обозначать буквой a , при синусах – буквой b , а начальный коэффициент – буквой $c_0 = \frac{a_0}{2}$, ряд Фурье примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{(1, f)}{\|1\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{\left(f, \cos\frac{n\pi x}{l} \right)}{\left\| \cos\frac{n\pi x}{l} \right\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \boldsymbol{N} \qquad (1)$$

$$b_n = \frac{\left(f, \sin\frac{n\pi x}{l} \right)}{\left\| \sin\frac{n\pi x}{l} \right\|} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \boldsymbol{N}\ .$$

О п р е д е л е н и е 1. Тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right), \qquad (2)$$

коэффициенты которого определяются по формулам (1), называется ***тригонометрическим рядом Фурье*** для периодической функции $f(x) \in L_2[-l;l]$.

Преобразуем равенство Парсеваля – Стеклова с учетом традиционных обозначений коэффициентов ряда Фурье:

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2 = \frac{a_0^2}{4}2l + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{2n-1} = a_n, \\ c_{2n} = b_n \end{bmatrix} = \frac{a_0^2}{2}l + l\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2 \right).$$

Отсюда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{l}\| f \|^2. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется ***уравнением Ляпунова***.

Ряд Фурье для периодической функции с периодом $T=2\pi$. Пусть $f(x)\in L_2[-\pi;\pi]$. Ряд Фурье для такой функции получается из ряда (2) при $l=\pi$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (4)$$

где коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n\in\boldsymbol{N},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n\in\boldsymbol{N}.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию (рис.1)

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } -\pi<x<0,\\ \ \ 1, \text{ если } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

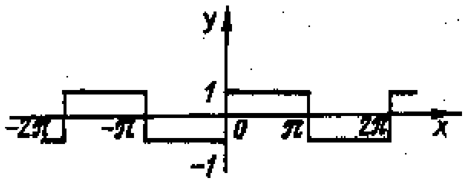

Рис.1.

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{\cos n\pi}{n}\right|_{-\pi}^{0}-\left.\frac{\cos n\pi}{n}\right|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, \text{ если } n=2k,\\ \dfrac{4}{\pi n}, \text{ если } n=2k+1,\end{cases}$$

где $k \in \boldsymbol{N}$.

Таким образом, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет следующий вид:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...+\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x+...\right).$$

На рисунках 2, 3, 4 изображены графики частичных сумм $S_n(x)$ – тригонометрические полиномы Фурье $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ соответственно.

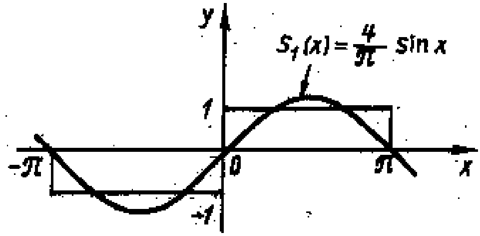

Рис.2.

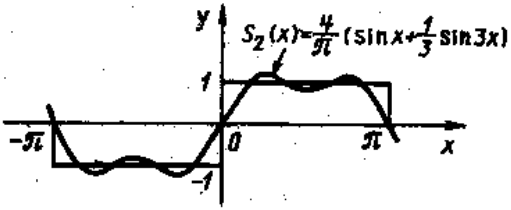

Рис.3.

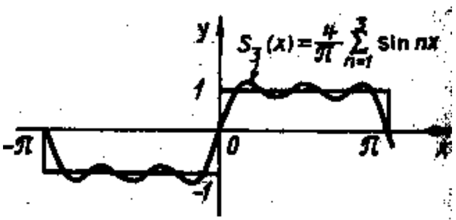

Рис.4.

Из этих рисунков видно, как частичные суммы S_n, ряда

Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n \to \infty$.

2. Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье. Каждой периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x) \in L_2[-l;l]$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по соответствующим формулам.

Важными являются следующие два вопроса о сходимости рядов Фурье.

1. При каких условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, ряд Фурье сходится в том или ином смысле к этой функции и, следовательно, в соотношениях (2) и (4) справедливы знаки равенства?

2. Как влияют свойства функции $f(x)$ на характер сходимости ее ряда Фурье?

Ответ на эти вопросы будет дан в трех сформулированных ниже теоремах.

Теорема 1. *Если $f(x) \in L_2[-l;l]$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right) \right) dx = 0 .$$

Без доказательства.

Теорема 2. *Если $f(x) \in L_2[-l;l]$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2) сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы ряда Фурье справедливы следующие соотношения*:

1) $S(x) = f(x)$, *если x – точка непрерывности функции $f(x)$*;

2) $S(x) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$, *если x_0 – точка разрыва первого рода функции $f(x)$*;

3) $S(-l)=S(l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

На рисунке 5 дана геометрическая интерпретация условий 1–3 теоремы 2.

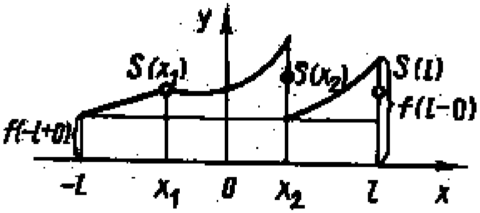

Рис.5.

Так, например, условие 2 означает, что в точках разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому пределов функции справа и слева.

Теорема 3. *Если функция $f(x)\in L_2[a;b]$ является кусочно-гладкой и непрерывной на отрезке $[-l;l]$, а на концах этого отрезка удовлетворяет условию $f(-l)=f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье на $[-l;l]$ сходится к $f(x)$ равномерно.*

Без доказательства.

Теоремы 1– 3 показывают, как свойства функции $f(x)\in L_2[a;b]$ влияют на сходимость ее ряда Фурье:

– *если $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция с периодом $T=2l$, то ее ряд Фурье сходится к ней в среднем*;

– *если $f(x)$ – кусочно-гладкая функция, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности этой функции и к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точке разрыва, т.е. сумма ряда не везде совпадает с $f(x)$*;

– *если $f(x)$ – кусочно-гладкая и непрерывная функция, то ее ряд Фурье сходится равномерно к $f(x)$*.

Другими словами, «улучшение» свойств функции $f(x)$ «улучшает» сходимость ее ряда Фурье, причем для более гладкой функции сходимость ее ряда Фурье сильнее в том смысле, что из нее следует сходимость ряда и для менее гладких функций.

Примеры. 1. Функция $f(x)=|x|$ (рис.6) на отрезке $[-l;l]$ удовлетворяет условиям теоремы 3, поэтому ее ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)=|x|$ на $[-l;l]$:

$$|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

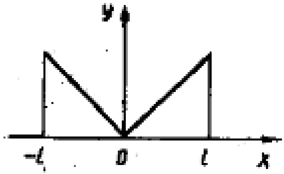

Рис.6.

2. Для функции $f(x)=x$ на интервале $]-l;l]$ (рис.7) записать ряд Фурье.

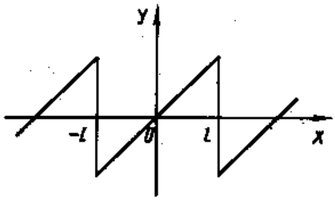

Рис.7.

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}xdx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left(-x\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{-l}^{l}+\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}.$$

Следовательно, ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)=x$ имеет вид:

$$x \sim \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Так как функция $f(x)=x$ на интервале $(-l;l)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$, но сходимость является не равномерной, а поточечной (во всех внутренних точках отрезка $[-l;l]$). На концах этого отрезка ряд Фурье не является сходящимся к $f(x)$, поскольку, согласно теореме 2, его сумма

$$S(-l)=S(l)=\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}=0.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad \forall x\in(-l;l).$$

3. Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, для непериодических функций. Рассмотрим частные случаи периодических функций с периодом $T=2l$, разложимых в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$.

Предположим, что в ряд Фурье разлагается четная функция, т.е. такая, что $f(-x)=f(x)$ $\forall x\in[-l;l]$. График четной функции (рис.8) симметричен относительно оси *Oy*.

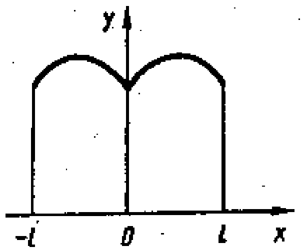

Рис. 8.

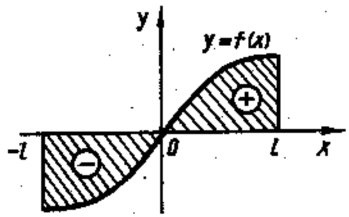

Рис.9.

С учетом того, что определенный интеграл можно рассматривать как площадь криволинейной трапеции, для четных функций имеем

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Для нечетных функций, т.е. таких, что $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in [-l;l]$ (рис.9), получаем

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 0 \,.$$

Из определения четных и нечетных функций следует, что:

1) *произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная*;

2) *произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная*.

Таким образом, если в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ разлагается четная функция, то произведение $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – нечетной функцией. Следовательно, коэффициенты ряда Фурье для четной функции находят по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \,,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \,,$$

$$b_n = 0 \,,\ n \in \boldsymbol{N} \,.$$

а сам ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы и свободный член:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \,.$$

Если в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ разлагается нечетная функция, то произведение $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является нечетной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – четной функцией. Таким образом, коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для нечетной функции находятся по формулам:

$$a_0 = a_n = 0 \,,\ n \in \boldsymbol{N} \,,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \mathbf{N},$$

а сам тригонометрический ряд Фурье для нечетной функции содержит только синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

В общем случае, если в ряд Фурье разлагается функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, т.е. такой, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то ее тригонометрический ряд Фурье содержит члены вида $a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$ и $b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.

Разложение непериодических функций в тригонометрический ряд Фурье. Выше отмечалось, что в тригонометрический ряд Фурье могут разлагаться только периодические функции с периодом $T = 2l$ либо $T = 2\pi$. Действительно, если функция $f(x)$ разлагается в ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

сходящийся к $f(x)$, то сумма этого ряда должна быть периодической функцией с периодом $T = 2\pi$, так как $\sin nx$ и $\cos nx$ являются периодическими функциями с периодом 2π.

Если функция $f(x)$ не является периодической, то для того, чтобы представить ее рядом Фурье, строят некоторую вспомогательную периодическую функцию $f^*(x)$, которая в области определения функции, например на отрезке $[-l;l]$ совпадает с функцией $f(x)$. В этом случае говорят, что *функцию $f(x)$ периодически продолжают на всю числовую ось*. Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l;l]$, то строят вспомогательную периодическую функцию $f^*(x)$ с периодом $T = 2l$, которая на $[-l;l]$ совпадает с $f(x)$, а на остальной части числовой оси является ее периодическим продолжением.

2. Если функция $f(x)$ задана на произвольном отрезке $[a;a+2l]$ длиной $2l$, то строят вспомогательную периодиче-

скую функцию $f^*(x)$ с периодом $T=2l$, которая на отрезке $[a;a+2l]$ совпадает с функцией $f(x)$, а на остальной части числовой оси является ее периодическим продолжением. В этом случае тригонометрический ряд имеет вид, определяемый формулой (2), но его коэффициенты находятся по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)dx\,,\; a_n=\frac{1}{l}\int\limits_0^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\; n\in \boldsymbol{N}\,,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\; n\in \boldsymbol{N}\,.$$

Для определения коэффициентов Фурье было использовано следующее свойство интегрирования периодической функции: значение интеграла от периодической функции с периодом $T=2l$ по произвольному отрезку длиной $2l$ постоянно, поэтому

$$\int\limits_a^{a+2l} f(x)dx=\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx\,.$$

3. Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам, либо и по синусам, и по косинусам.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по косинусам ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ четным образом (рис.10):

$$f^*(x)=\begin{cases} f(-x)\,\forall x\in[-l;0], \\ f(x)\,\forall x\in[0;l], \end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

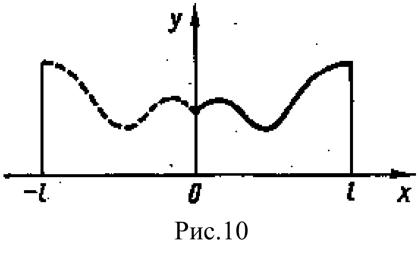

Рис.10

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

где

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n\in\boldsymbol{N}.$$

Для разложения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0;l]$, в ряд по синусам ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом (рис.11):

$$f^*(x)=\begin{cases}-f(-x)\ \forall x\in[-l;0],\\ f(x)\ \forall x\in[0;l],\end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

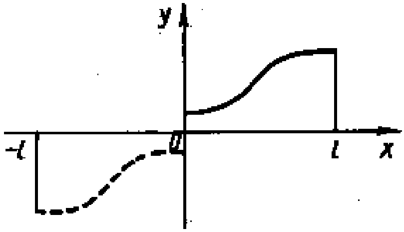

Рис.11.

Пример. Разложить функцию $f(x)=x$ на отрезке $[0;\pi]$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и по синусам

***Решение*.** **1.** Продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом, т.е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)$, определенную на $[-\pi;\pi]$ следующим образом: $f^*(x)=|x|$. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

Откуда

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f^*(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)\quad \forall x\in[-\pi;\pi]$$

или $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\ldots .$$

2. Продолжим функцию $f(x)=x$ теперь на отрезок $[-\pi;0]$ нечетным образом, т.е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)=x$, $|x|<\pi$. Вычислим коэффициенты Фурье b_n (так как для нечетной функции $a_0=a_n=0$):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx dx=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Тогда $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\ldots .$$

4. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Пусть $f(x)\in L_2[-l;l]$ – периодическая функция с периодом $T=2l$. Если она представима сходящимся тригонометрическим рядом Фурье. В электро- и радиотехнике для такой функции используют другую форму записи тригонометрического ряда Фурье – комплексную, которую можно получить, воспользовавшись формулами Эйлера:

$$\cos\alpha x=\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2},\ \sin\alpha x=\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}.$$

Ряд Фурье для такой функции примет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2}+b_n\frac{e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)$$

Введем следующие обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \; c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \; c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-i\frac{n\pi x}{l}} \right)$$

или

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}.$$

Ряд называется ***комплексной формой тригонометрического ряда Фурье***.

Найдем коэффициенты Фурье c_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$, использовав формулы Эйлера и принятые обозначения:

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{i\frac{n\pi x}{l}} dx \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

Объединяя выражения для коэффициентов c_{-n} и c_n в одну формулу, получим

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx \quad \forall n = 0, \pm 1, \ldots.$$

Определение 3. Выражения $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ называются ***гармониками***, числа $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ – ***волновыми числами*** функции $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n x}$, множество всех волновых чисел – ***спектром***. Коэффициенты c_n называются ***комплексными амплитудами***.

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляются коэффициенты тригонометрического Фурье для периодических функций?

2. При выполнении каких условий тригонометрический ряд Фурье сходится к функции?

3. В чем особенность вычисления коэффициентов Фурье для четных и нечетных функций?

4. Как разложить в ряд Фурье непериодическую функцию?

ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1 – М.: Наука, 1981.
2. Зорич В.А Математический анализ. Ч.2. – М.: Наука, 1984.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1985.
4. Кудрявцев. Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. – М.: Наука., 1989.
5. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебн. пособие для вузов / Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984.
6. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч.1/ А.И.Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Выш.шк., 1989.
7. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч.2/ А.И.Герасимович, Н.П. Кеда, М.Б. Сугак. – Мн.: Выш.шк., 1990.
8. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2т. Т.1. – М.: Наука, 1990.
9. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2т. Т.2. – М.: Наука, 1991.
10. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука., 1988.

Учебное издание

Марченко Лариса Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тексты лекций для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть третья

Теории рядов

В авторской редакции

Подписано в печать 26.10.2006. (66) Бумага писчая №1. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл.п.л. _____. Уч.изд.л. _____. Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
Учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104